конгруэнция прямых xy является нормальной конгруэнцией [4] относительно поверхности V_{n-1}. Пусть вектор $\vec{e}_n$ является нормальным вектором поверхности V_{n-1}. Так как $\overrightarrow{\mathcal{F}x} \parallel \vec{e}_n$, то $\overrightarrow{\mathcal{F}x} = \tau\cdot\vec{e}_n$, где $\tau=\tau(x)$ – функция точки x, или $\vec{x}-\vec{\mathcal{F}}=\tau\vec{e}_n$. Дифференцируя полученное равенство, имеем:

$$d\vec{x} = d\tau\cdot\vec{e}_n + \tau\, d\vec{e}_n .$$

Используя деривационные формулы репера R^x, получим:

$$\omega^i\vec{e}_i = d\tau\cdot\vec{e}_n + \tau\,(\omega_n^i\vec{e}_i + \omega_n^n\vec{e}_n),$$

или в силу линейной независимости системы векторов $\vec{e}_i$, $\vec{e}_n$:

$$\omega^i = \tau\omega_n^i,$$

$$d\tau + \tau\omega_n^n = 0. \qquad (4)$$

Так как $\vec{e}_n^{\,2}=1$, то $\vec{e}_n\cdot d\vec{e}_n=0$, поэтому в силу деривационных формул репера R^x: $\omega_n^n=0$. Из равенства (4) следует, что $d\tau=0$, т.е. $\tau=const$. Таким образом, $\overrightarrow{\mathcal{F}x}^2=\tau^2$, где $\tau=const$, т.е. поверхность V_{n-1} лежит на гиперсфере с центром $\mathcal{F}$ и радиусом τ, а отображение f является центральным проектированием части гиперсферы на поверхность $\bar{V}_{n-1}$. Итак, доказана

Т е о р е м а 2. Если любая линия на поверхности V_{n-1} является двойной линией отображения f и конгруэнция прямых xy является нормальной относительно поверхности V_{n-1} (поверхности $\bar{V}_{n-1}$), то поверхность V_{n-1} (поверхность $\bar{V}_{n-1}$) является частью гиперсферы.

С л е д с т в и е. Если конгруэнция прямых xy является нормальной относительно поверхностей V_{n-1} и $\bar{V}_{n-1}$ одновременно, то обе эти поверхности лежат на концентрических гиперсферах с центром в точке $\mathcal{F}$, а отображение f в этом случае является гомотетией с центром в точке $\mathcal{F}$.

Библиографический список

1. С и л а е в а Г.М. О паре гиперповерхностей евклидова п-пространства: Дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1989.

2. К а г а н В.Ф. Основы теории поверхностей. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. Т.I.

3. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.15. С.19-25.

4. Н о р д е н А.П. Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956.

УДК 514.76

МИНИМАЛЬНОЕ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЕ НА КОМПАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

С.Е.С т е п а н о в

(Владимирский педагогический институт)

Согласно основной теореме статьи [1] компактное ориентированное риманово многообразие M не допускает минимальных слоений коразмерности один, если кривизна Риччи многообразия положительна; если же кривизна Риччи неотрицательна и одно такое слоение существует, то все его слои – вполне геодезические подмногообразия M. В настоящей работе данная теорема обобщается на случай минимальных (неинтегрируемых) гиперраспределений.

1. Рассмотрим гиперраспределение Δ на n-мерном римановом многообразии $(M,\langle\,,\rangle)$ со связностью Леви-Чивита ∇. Обозначим через $\Delta^{\perp}$ ортогональное дополнение Δ. Тензор интегрируемости F и вторая фундаментальная форма Q распределения Δ определяются следующими равенствами [2, с.148]:

$$\begin{cases} \langle F(X,Y),Z\rangle = \frac{1}{2}\langle\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z\rangle, \\ \langle Q(X,Y),Z\rangle = \frac{1}{2}\langle\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle \end{cases} \qquad (1.1)$$

для любых векторных полей $X,Y\in\Delta$ и $Z\in\Delta^{\perp}$. Гиперраспределение Δ будет интегрируемым, вполне геодезическим или минимальным [2, с.148,150,151], если соответственно $F=0$, $Q=0$ или $\operatorname{trace} Q = 0$.

Пусть ξ – единичное векторное поле, принадлежащее $\Delta^{\perp}$. Определим на M тензорное поле A типа (1,1), полагая

$$AX = -\nabla_X\xi \qquad (1.2)$$

для любого векторного поля X на M. Поскольку для $X,Y\in\Delta$ выполняются равенства $\langle X,\xi\rangle=0$ и $\langle Y,\xi\rangle=0$, то в силу (1.2) будем иметь $\langle\nabla_Y X,\xi\rangle=\langle X,AY\rangle$ и $\langle\nabla_X Y,\xi\rangle=\langle Y,AX\rangle$. На основании этого равенства (1.1) можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \langle F(X,Y),\xi\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle AX,Y\rangle - \langle X,AY\rangle\right), \\ \langle Q(X,Y),\xi\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle AX,Y\rangle + \langle X,AY\rangle\right). \end{cases} \tag{1.3}$$

Поле A, как это последует при ковариантном дифференцировании равенства $\langle\xi,\xi\rangle=1$, удовлетворяет условию

$$\langle AX,\xi\rangle = 0 \tag{1.4}$$

для любого векторного поля X на M. Из (1.4), в частности, следует, что в каждой точке x многообразия $\mathrm{Im}\,A_x \subseteq \Delta$ и $\mathrm{rang}\,A_x \leq n-1$. Более того, в Δ_x оператор A_x индуцирует симметрическое преобразование, если $F=0$, и кососимметрическое, если $Q=0$. Выберем в $T_x(M)$ ортонормированный базис $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ таким, чтобы $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1}\}$ был базисом Δ_x, а $\vec{e}_n=\xi_x$. Тогда условию минимальности $\mathrm{trace}\,Q=0$ гиперраспределения Δ можно придать вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \langle A_x\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\alpha\rangle = 0.$$

При этом из (1.4) выводим $\langle A_x\vec{e}_n, \vec{e}_n\rangle = 0$, а в результате для минимального гиперраспределения $\mathrm{trace}\,A=0$.

Назовем по аналогии с теорией гиперповерхностей собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (некоторые из них могут быть комплексными) оператора A_x главными кривизнами гиперраспределения Δ в точке $x\in M$. Тогда главные кривизны интегрируемого гиперраспределения (слоения коразмерности один) будут вещественными величинами, а вполне геодезического гиперраспределения - мнимыми величинами или нулями.

Заметим, что $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ определены с точностью до общего для всех знака, так как A определено с точностью до знака, зависящего от того, используется ли ξ или $-\xi$ в качестве орта $\Delta^\perp$.

2. Пусть $(M,\langle,\rangle)$ - компактное ориентированное риманово многообразие, тогда [3, с.45] для каждого векторного поля ξ на M справедлива интегральная формула:

$$\int_M [S(\xi,\xi) + \mathrm{trace}\,A^2 - (\mathrm{trace}\,A)^2]\,dv = 0, \tag{2.1}$$

где S - тензорное поле Риччи связности ∇. В случае, если ξ - единичное векторное поле, принадлежащее $\Delta^\perp$, а Δ - минимальное гиперраспределение, то формула (2.1) принимает следующий вид:

$$\int_M [\mathrm{Ric}(\xi) + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^2]\,dv = 0, \tag{2.2}$$

где $\mathrm{Ric}(\xi)$ - кривизна Риччи в направлении ξ. Справедлива

Т е о р е м а 1. Пусть Δ - минимальное гиперраспределение на компактном ориентированном римановом многообразии $(M,\langle,\rangle)$, и ξ - единичное векторное поле, принадлежащее $\Delta^\perp$. Если все главные кривизны $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ гиперраспределения Δ суть вещественные величины, то $\int_M \mathrm{Ric}(\xi)\,dv \leq 0$; если же все $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ - мнимые величины либо нули, то $\int_M \mathrm{Ric}(\xi)\,dv \geq 0$.

В случае вполне геодезического или минимального интегрируемого гиперраспределений обращение в нуль главных кривизн $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ равносильно равенствам $F=Q=0$. При этом гиперраспределение будет интегрируемым с вполне геодезическими интегральными многообразиями (вполне геодезическим слоением коразмерности один). Справедливы два следствия, первое из которых является теоремой 5.3 статьи [4].

С л е д с т в и е 1. Пусть Δ - минимальное слоение коразмерности один на компактном ориентированном многообразии $(M,\langle,\rangle)$ и ξ - единичное векторное поле, принадлежащее $\Delta^\perp$, тогда $\int_M \mathrm{Ric}(\xi)\,dv \leq 0$. Равенство имеет место только в случае, когда Δ - вполне геодезическое слоение.

С л е д с т в и е 2. Пусть Δ -вполне геодезическое гиперраспределение на компактном ориентированном римановом многообразии $(M,\langle,\rangle)$ и ξ - единичное векторное поле, принадлежащее $\Delta^\perp$, тогда $\int_M \mathrm{Ric}(\xi)\,dv \geq 0$. Равенство имеет место только в случае, когда Δ - вполне геодезическое слоение.

Если предположить, что $\mathrm{Ric}_M \geq 0$, то из (2.2) с необходимостью следует, что все $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ не могут быть одновременно отличными от нуля вещественными величинами. Если же $\mathrm{Ric}_M \leq 0$, то все $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ не могут быть одновременно отличными от нуля мнимыми величинами. Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Пусть $(M,\langle,\rangle)$ - компактное ориентированное риманово многообразие. Если $\mathrm{Ric}_M \geq 0$, то многообразие не допускает минимальных гиперраспределений с отличными от нуля вещественными главными кривизнами. Если $\mathrm{Ric}_M \leq 0$, то многообразие не допускает минимальных гиперраспределений с отличными от нуля мнимыми главными кривизнами.

В случае минимального слоения коразмерности один имеем в качестве следствия основную теорему работы [1]. В случае же вполне геодезического гиперраспределения справедливо

С л е д с т в и е 3. Пусть $(M, \langle,\rangle)$ - компактное ориентированное риманово многообразие. Если $Ric_M > 0$, то многообразие не допускает вполне геодезических гиперраспределений. Если же $Ric_M \leq 0$, то любое вполне геодезическое гиперраспределение, если оно существует на многообразии, является слоением.

Данное следствие обобщает один из основных результатов статьи [5].

Библиографический список

1. Oshikiri G. A remark on minimal foliation // Tohoku Math. J. 1981. V 33. P. 133-137.
2. Reinhart B.L. Differential geometry of foliations. Berlin - New York, 1983. 190p.
3. Я н о К., Б о х н е р С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152 с.
4. Akhil R. Structural equations and an integral formula for foliated manifolds // Geom. dedic. 1968. V20. №1. P.85-91.
5. Hagan T., Lutz R. Champs d'hyperplans totalement géodésiques sur les sphéres // Astérisque. 1983. №107-108. P. 189-200.

УДК 514.76

ОБ ОСНАЩЕНИЯХ В СМЫСЛЕ Э.КАРТАНА И Э.БОРТОЛОТТИ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ

А.В.С т о л я р о в

(Чувашский педагогический институт)

Настоящая статья является продолжением работы [1]. С существенным использованием двойственной теории регулярной m-мерной гиперполосы H_m, погруженной в n-мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$, показано, что два вида частных оснащений (в смысле Э.Картана и Э.Бортолотти) являются двойственными по отношению друг к другу.

1. Рассмотрим классическое пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое, согласно Э.Картану [2], [3], с по-

мощью $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega_J^{\bar K}$, подчиненных структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_J^{\bar K} = \omega_J^{L} \wedge \omega_{L}^{\bar K} + \frac{1}{2} R_{JPQ}^{\bar K} \omega_0^P \wedge \omega_0^Q, \quad \omega_L^L = 0, \qquad (1)$$

$$J, \bar K, L = \overline{0,n}; \quad J, K, L, P, Q = \overline{1,n}.$$

В пространстве $P_{n,n}$ рассмотрим регулярную гиперполосу $H_m\ (m<n-1)$ [4]; в точечном репере первого порядка $\{A_J\}$ дифференциальные уравнения многообразия $H_m \subset P_{n,n}$ имеют вид [5]:

$$\begin{cases} \omega_0^n = \omega_0^v = \omega_v^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \\ \omega_i^v = \Lambda_{ij}^v \omega_0^j, \quad \omega_v^i = \Lambda_{vj}^i \omega_0^j, \quad u,v,w = \overline{m+1,n-1}, \ i,j,k,\ell,s,t = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad (2)$$

Задание гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ индуцирует пространство проективной связности $P_{m,n}$ с m-мерной базой (базисная поверхность гиперполосы) и n-мерными центропроективными слоями P_n, ибо из уравнений (1) в силу $\omega_0^\alpha = 0$ (см. (2)) имеем

$$\mathcal{D}\omega_J^{\bar K} = \omega_J^{L} \wedge \omega_{L}^{\bar K} + \frac{1}{2} R_{Jst}^{\bar K} \omega_0^s \wedge \omega_0^t, \quad \omega_L^L = 0; \qquad (3)$$

здесь компоненты R_{oij}^α, R_{vij}^n, R_{ost}^i, R_{ist}^n, R_{ost}^o, R_{nst}^n с компонентами геометрических объектов первого, второго, третьего и четвертого порядков гиперполосы связаны конечными соотношениями (см., например, [1], [6]):

$$2\Lambda_{[ij]}^n = -R_{oij}^n, \ 2\Lambda_{[ij]}^v = -R_{oij}^v, \ 2\Lambda_{k[i}^n \Lambda_{|v|j]}^k = R_{vij}^n, \ 2\Lambda_{i[jk]}^n = -R_{ijk}^n +$$
$$+\Lambda_{is}^n R_{ojk}^s, \ 2\Lambda_{ij[ks]}^n = 2\Lambda_{i\ell}^n \Lambda_{j[k}^v \Lambda_{|v|s]}^\ell + 2\Lambda_{\ell j}^n \Lambda_{i[k}^v N_{|v|s]}^\ell + \Lambda_{i\ell}^n R_{jks}^\ell +$$
$$+\Lambda_{\ell j}^n R_{iks}^\ell - \Lambda_{ij}^n (R_{oks}^o + R_{nks}^n) + \Lambda_{ij\ell}^n R_{oks}^\ell, \ \Lambda_{[ks]} = \Lambda_\ell R_{oks}^\ell - m(R_{oks}^o +$$
$$+R_{nks}^n) + 2R_{\ell ks}^\ell - 4\Lambda_{v[k}^\ell \Lambda_{s]\ell}^v, \ 2b_{uv[st]}^n = -2b_{wv}^n \Lambda_{\ell[s}^w \Lambda_{|u|t]}^\ell -$$
$$-2b_{uw}^n \Lambda_{\ell[s}^w \Lambda_{|v|t]}^\ell + b_{uv\ell}^n R_{ost}^\ell + b_{wv}^n R_{ust}^w + b_{uw}^n R_{vst}^w - b_{uv}^n (R_{ost}^o + R_{nst}^n),$$
$$2\Phi_{[ks]} = \Phi_t R_{oks}^t - (n+1)(R_{oks}^o + R_{nks}^n).$$

В работе [1] (см. также [6]) нами показано, что:

а) регулярная гиперполоса $H_m \subset P_{n,n}$ кроме пространства $P_{m,n}$ в 3-й дифференциальной окрестности индуцирует второе пространство проективной связности $\overline{P}_{m,n}$, определяемое системой форм $\{\overline{\omega}_J^{\bar K}\}$: